**стохастическое программирование**

Стохастическим   программированием  называют  метод  решения оптимизационных задач, в которых целевая функция недоступна для вычисления в чистом виде, а может быть оценена или вычислена с погрешностью, например из эмпирических наблюдений или экспериментов.

Термин *стохастическое программирование* (СП) появился в начале 50-х гг.XXв., когда Данциг, Чарнс и Купер стали анализировать задачи*линейного программирования* со случайными коэффи­циентами, возникающие при планировании в ситуациях с неопре­деленностью и риском [9]. При решении задач СП нельзя обойтись детерминированны­ми методами и приходится использовать специальные стохасти­ческие процедуры. В задачах СП максимизации или минимиза­ции обычно подлежит некоторая характеристика случайной функции, например ее математическое ожидание. При этом в не­которых постановках задач СП допускается выполнение ограни­чения в виде равенства (или неравенства) с некоторой положи­тельной вероятностью.

Стохастическое   программирование  может применяться для решения задач оценки параметров  стохастических  объектов, управления, динамической идентификации, однако, в отличие от прямых  методов  решения этих задач,  стохастическое   программирование  не требует хранения всей накопленной информации об объекте, а предлагает способ адаптивной коррекции оценки по данным следующего наблюдения. Рассматриваются такие  методы  как Робинса–Монро, Киффера–Вольфовица, конечно-сходящиеся алгоритмы,  методы  случайного поиска. Кроме того, рассматриваются нейросетевые и генетические алгоритмы, как частные случаи алгоритмов  стохастического   программирования  для решения специфических задач. Курс предназначен для студентов, специализирующихся в области математических  методов  анализа и интерпретации данных.

**1. Линейное программирование.**

Ответственные решения в современных целенаправленных системах планирования и управления должны быть в некотором смысле экстремальными или близкими к ним. Отступление от этого принципа обычно связано с излишними затратами (часто весьма значительными) и снижает эффективность управления (часто весьма существенно). Большое число задач планирования, управления и проектирования укладывается в схему линейного программирования:

*C x*→*max*, (1.1)

*Ax*≤*b*, (1.2)

*x*≥ 0. (1.3)

Еще более широкий класс задач выбора эффективного решения укладывается в рамки общей схемы математического программирования.

План, набор команд управления или проект часто могут быть формально представлены в виде системы чисел или функций, удовлетворяющих определенным ограничениям — равенствам, неравенствам или логическим соотношениям. План, система команд управления или проект оптимальны, если они, кроме того, обращают в минимум или в максимум (в зависимости от постановки задачи) некоторую функцию от искомых параметров — показатель качества решения.

Запись (1.1)—(1.3), вполне осмысленная при детерминированных значениях параметров условий задачи, теряет определенность и требует дополнительных разъяснений при случайных значениях исходных данных. Между тем во многих прикладных задачах коэффициенты *cj* целевой функции, элементы матрицы условий*А*или составляющие вектора ограничений*b*— случайные величины. Исходная информация для планирования, проектирования и управления, как правило, недостаточно достоверна. Планирование производства обычно ведется в условиях неполной информации об обстановке, в которой будет выполняться план и реализовываться произведенная продукция. Во всех случаях в моделях математического программирования, к исследованию которых сводятся задачи планирования, проектирования и управления, отдельные или все параметры целевой функции и ограничений могут оказаться неопределенными или случайными. Естественный на первый взгляд путь анализа подобных*задач—замена случайных параметров их средними значениями и вычисление оптимальных планов полученных таким образом детерминированных моделей—не всегда оправдан.*При сглаживании параметров условий задачи может быть нарушена адекватность модели изучаемому явлению. Усреднение исходных данных может привести к потере полезной информации и привнести в модель ложную информацию.

*Решение детерминированной задачи с усредненными параметрами может не удовлетворять ограничениям исходной модели при допустимых реализациях параметров условий.*

**2. Стохастическое   программирование**

В одних случаях опыт, статистика и изучение процессов, определяющих изменение исходных данных и формирующих условия, в которых реализуется план, проект или система управления, позволяют устанавливать те или иные *вероятностные характеристики параметров целевой функции и ограничений задачи*. В других случаях*нет оснований, для каких бы то ни было суждений о статистических особенностях явлений, способных изменить предполагаемые значения параметров условий задачи*.

Ситуации первого типа называются *ситуациями, связанными с риском*, а ситуации второго типа - *неопределенными*. И те, и другие ситуации являются предметом исследования  стохастического   программирования. Стохастическое программирование является разделом математического программирования, изучающего теорию и  методы  решения условных экстремальных задач при неполной информации о параметрах условий задачи.

Постановки задач  стохастического   программирования  существенным образом зависят от целевых установок и информационной структуры задачи.

В приложениях  стохастическое   программирование  используется для решения задач двух типов:

- в задачах *первого типа* прогнозируются статистические характеристики поведения множества идентичных экстремальных систем. Соответствующий раздел  стохастического   программирования  будем называть *пассивным  стохастическим   программированием*;

- модели *второго типа*предназначены для построения методов и алгоритмов планирования и управления в условиях неполной информации. Соответствующий раздел  стохастического   программирования  будем называть*активным  стохастическим   программированием*, подчеркивая этим действенную целевую направленность моделей.

Подходы к постановке и анализу  стохастических  экстремальных задач существенно различаются в зависимости от того, получена ли информация о параметрах условий задачи (или об их статистических характеристиках) в один прием или по частям (в два или более этапов). При построении  стохастической  модели важно также знать, необходимо ли *единственное решение*, не подлежащее корректировке, или можно по мере накопления информации один или несколько раз*подправлять решение*. Другими словами, речь идет о том, какая задача рассматривается:*статическая или динамическая*. В соответствии с этим в  стохастическом   программировании*исследуются одноэтапные, двухэтапные и многоэтапные задачи.*

*Статические, или одноэтапные, задачи*стохастического   программирования  представляют собой естественные  стохастические  аналоги детерминированных экстремальных задач, в которых динамика поступления исходной информации не играет роли, а решение принимается один раз и не корректируется. Одноэтапные  стохастические  задачи, как те, что порождены детерминированными моделями  стохастического   программирования, так и те, что имеют смысл только при случайных параметрах условий, различаются *характером ограничений и выбором целевой функции*.

Разработка предварительного плана и компенсация невязок - два этапа решения одной задачи. В соответствии с этим задачи рассматриваемого типа называют *двухэтапными задачами  стохастического   программирования*. Естественным обобщением двухэтапных задач являются многоэтапные (динамические) задачи  стохастического   программирования. Часто в процессе управления представляется возможность последовательно наблюдать ряд реализаций параметров условий и соответствующим образом корректировать план. Естественно, что как предварительный план, так и последовательные корректировки должны, помимо содержательных ограничений, учитывать априорные статистические характеристики случайных параметров условий на каждом этапе.

К анализу многоэтапных задач  стохастического   программирования  сводятся формальные исследования численных  методов  планирования производства и развития экономической системы. Роль  стохастических  моделей и  методов  в исследовании закономерностей поведения экономических систем и в разработке количественных методов планирования экономики и управления производством имеет *два аспекта — методологический и вычислительный.*И тот и другой связаны с одной из важнейших категорий современной математической логики —*с понятием сложности, точнее, с понятиями «сложность алгоритма», «сложность вычислений» и «сложность развития».*

Роль *вычислительного аспекта проблемы*определяется тем, что планирование, управление и проектирование происходят, как правило, в условиях неполной информации. Рыночная конъюнктура, спрос на продукцию, изменения в состоянии оборудования не могут быть точно предсказаны. В условиях конкурентной экономики дополнительно возникает направленная дезинформация.

Учет случайных факторов и неопределенности в планировании и управлении — важная задача  стохастического   программирования. Однако этим не исчерпывается роль  стохастических   методов  в анализе процессов. *Принципы  стохастического   программирования  дают основание для сопоставления затрат на накопление и хранение информации с достигаемым экономическим эффектом, позволяют аргументировать рациональное разделение задач между человеком и вычислительной машиной и служат теоретическим фундаментом для алгоритмизации управления сложными системами.*

Принципы  стохастического   программирования  позволяют сблизить точные, но узко направленные формальные математические  методы  с широкими, но нечеткими содержательными эвристическими методами анализа. И здесь, таким образом, мы переходим к *методологической роли*стохастического   программирования  в исследовании сложных систем.

В связи с *оценками сложности алгоритмов и вычислений*представляет смысл условно разделить задачи планирования, управления и проектирования на задачи вычислительного и не вычислительного характера. Многие задачи управления, должны быть отнесены к классу задач не вычислительного характера. Т.о. необходимо согласование сложности управляемого объекта и управляющего устройства за счет рационального упрощения объекта (разумной переформулировки задачи).

**3. Формальная постановка  стохастической  задачи**

Приведем формальную постановку многоэтапной  стохастической  задачи. Пусть *i*—набор случайных параметров *i*-го этапа, a *xi* —решение, принимаемое на *i*-м этапе. Обозначим *k* =(1 , 2 , *k*) , *xk* = (*x*1 , … , *xn*), *k* = 1,…, *n*. Общая модель многоэтапной задачи  стохастического   программирования  имеет вид:

*M*(*n*,*E*(*n*,*xn*)→*max*, (3.1)

*M*(*k*,*k*(*k*,*xk*)) ≤*M* (*bk*(*k*-1)), (3.2)

*xk* ≤*Gk*,*k*=1,…,*n*. (3.3)

Здесь *E*(*n*,*xn*) —случайная функция от решений всех*n* этапов;

(*k*(*k*,*xk)*) - случайная вектор-функция, определяющая ограничения*k*-го этапа;

*bk*(*k*-1) —случайный вектор;

*Gk*—некоторое множество, определяющее жесткие ограничения*k*-го этапа;

*M*(*k*/(*k*-1)) - условное математическое ожидание*M*(*k*) в предположении, что на этапах, предшествующих*k* - му, реализован набор (*k*-1) =(1,2,.. (*k*-1)).

Предполагается, что совместное распределение вероятностей всех случайных параметров условий задано (или, по крайней мере, известно, что оно существует). Для того чтобы постановка задачи (3.1)—(3.3) была полной, необходимо еще указать, среди какого класса функций (решающих правил) *x*=*x*(*Х*) от реализаций случайных исходных данных следует разыскивать решение.

К моменту, когда должно быть принято решение *k*-то этапа, можно успеть обработать результаты наблюдения реализаций случая на этапах*s*1,*s*2...,*sk-*1*.*В задачах решение на*i*-м этапе принимается после реализации случайных параметров условий на предыдущем (*i*—1)-м этапе.

Решающие правила имеют вид *xi*=*xi*(*i*-1) ,*i*= 1,…,*n*,*x*(0)=*c.*

Будем называть такие задачи многоэтапными задачами  стохастического   программирования  с условными ограничениями и с априорными решающими правилами. Сведение задачи управления к анализу модели  стохастического   программирования  позволяет разделить процесс выбора решения на два этапа.

*Первый - трудоемкий предварительный*- использует структуру задачи и априорную статистическую информацию для получения решающего правила (или решающего распределения) - формулы, таблицы или инструкции, устанавливающей зависимость решения (или функции распределения оптимального плана) от конкретных значений параметров условий задачи.

*Второй - нетрудоемкий оперативный этап*- использует решающее правило (решающее распределение) и текущую реализацию условий для вычисления оптимального плана (или его распределения).

**4. Методы  решения задач  стохастического   программирования**

Основные классы задач, для решения которых создается вычислительный комплекс непосредственно или  методами   стохастического  расширения, формулируются как модели  стохастического   программирования.

Вообще говоря, все модели выбора решения, сформулированные в терминах математического программирования могут быть (в практических задачах, отвечающих управлению сложными системами и процессами, должны быть) сформулированы как модели  стохастического   программирования.

Соответствие формально построенных  стохастических  моделей содержательным постановкам является решающим условием успешного управления в условиях неполной информации. Вряд ли могут быть приведены универсальные рекомендации по выбору информационной структуры модели и статистических характеристик, используемых для формирования целевого функционала задачи и области его определения.

Анализ опыта решения практических экстремальных задач методами *математического программирования*свидетельствует о серьезных успехах этого подхода (и о внедрении данных методов в практику планирования, управления и проектирования) в задачах относительно простой структуры. Главным образом решаются одноэкстремальные задачи при не слишком большой размерности, когда число переменных и ограничений (в моделях достаточно общего вида) не превышает сотен или тысяч.

Однако методы детерминированного математического программирования не прививаются в системах большой сложности, отвечающих многоэкстремальным задачам или задачам большой размерности.

До сих пор нет достаточно конструктивного  метода  решения общей (даже линейной) двухэтапной задачи  стохастического   программирования. Стандартные методы выпуклого программирования в общем случае неприменимы для вычисления предварительного плана — решения выпуклой задачи первого этапа. Основная трудность в том, что целевая функция и область определения планов первого этапа заданы, вообще говоря, неявно. В случаях, когда область имеет относительно простую структуру или задача оказывается с простой рекурсией, эффективным, хотя и трудоемким  методом  вычисления предварительного плана, оказывается  метод   стохастических  градиентов, представляющий собой итеративный  метод  типа  стохастической  аппроксимации.

Все это подсказывает путь алгоритмизации решения сложных задач в автоматизированных системах управления - замену трудоемких процедур, отвечающих обоснованным (точным или приближенным)  методам  решения детерминированных экстремальных задач, относительно простыми «законами управления» - решающими правилами или решающими распределениями  стохастического  расширения соответствующих задач.

Платой за упрощение задачи и за переход от громоздких алгоритмов к относительно простым решающим механизмам служат трудоемкая предварительная работа по построению «законов управления» и некоторая потеря эффективности решения задачи в каждом отдельном случае.

В литературе по  стохастическому   программированию  описаны многочисленные модели выбора решений, сформулированные в терминах  стохастического   программирования. Разнообразные задачи управления запасами - классические примеры  стохастических  моделей. Синтез систем массового обслуживания, удовлетворяющих заданным требованиям и оптимизирующих пропускную способность системы или определяемый ею доход, сводится к решению экстремальных  стохастических  задач.